DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324
УДК 517.95

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

© М. С. Коржавина, В. И. Сумин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: maryasha_f@mail.ru, v_sumin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается первая начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения с управляемыми коэффициентами главной части. Формулируются достаточные условия устойчивости (при возмущении управляемых коэффициентов) существования глобальных решений начально-краевой задачи.

Ключевые слова: полулинейное параболическое уравнение; первая начально-краевая задача; управляемая главная часть; устойчивость существования глобальных решений

В теории оптимального управления при выводе необходимых условий оптимальности, при обосновании численных методов оптимизации и во многих других случаях важную роль играют условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) управляемых начально-краевых задач (см., например, [1–6]; история вопроса кратко описана в [6]). Условиям УСГР начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений с управлением в правой части посвящены публикации [7], [1, гл. 2, §5] (при фиксированных гладких коэффициентах главной части уравнения) и [8, 9] (при фиксированных измеримых главных коэффициентах); см. также [2]. Ниже такие условия формулируются для параболического уравнения с гладкими управляемыми коэффициентами главной части. Рассматривается первая начально-краевая задача с однородными граничными и начальными условиями в случае, когда первые прозводные входят в уравнение линейно (частный случай такой задачи, когда первые производные по пространственным переменным в уравнение не входят, был рассмотрен в [10]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727).

Пусть: заданы числа $T > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ $(d_1 \le d_2)$ и ограниченная односвязная область $Q \subset \mathbf{R}^n$ $(\partial Q \in C_2)$; элементы Q обозначаем $x = \{x^1, \ldots, x^n\}$; $\Pi_\sigma \equiv Q \times (0,\sigma), \sigma \in (0,T); \Pi \equiv \Pi_T$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\mathcal{L}[y] \equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(c_{ij}\left(x,t\right) y'_{x^j}\right)'_{x^i} + \sum_{j=1}^{n} b_j\left(x,t\right) y'_{x^j} = g\left(\{x,t\}, y\left(x,t\right)\right), \{x,t\} \in \Pi; \quad (1)$$

$$y\left(x,0\right) = 0, \quad x \in Q; \quad (2)$$

$$y\left(x,t\right) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

где c_{ij} — управления, $1 \le i,j \le n$; функция $g\left(\{x,t\}, y\right) : \Pi \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, и коэффициенты b_j, $1 \le j \le n$, заданы. Предполагаем, что функции g и g'_y непрерывны по y, измеримы по $\{x,t\}$ и ограничены на любом ограниченном множестве; последнее означает существование неубывающей функции $N(.) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такой, что $\left|g\left(\{x,t\}, y\right)\right|, \left|g'_y\left(\{x,t\}, y\right)\right| \le N(M)$, если $\{x,t\} \in \Pi, |y| \le M$, каково бы ни было $M \ge 0$. Пусть D — некоторое множество элементов пространства $\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi})$ (определения используемых функциональных пространств см. в [11]). Множество $\mathbf{D}$ допустимых управлений $\mathbf{c} \equiv \{c_{ij}, 1 \le i,j \le n\}$ состоит из всех тех наборов, для каждого из которых: $c_{ij} \in D$, $1 \le i,j \le n$; производные $(c_{ij})'_{x^i}$, $1 \le i,j \le n$, принадлежат классу $\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi})$; выполняется условие равномерной параболичности: $d_1 \left|\xi\right|^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\xi^i\xi^j \le d_2 \left|\xi\right|^2$, $\{x,t\} \in \overline{\Pi}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Считаем, что коэффициенты b_j, $1 \le j \le n$, принадлежат классу $\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi})$. Положим $d_3 \equiv \max\left\{\|b_j\|_{C(\Pi)} : 1 \le j \le n\right\}$.

Чтобы определить понятие решения задачи (1)-(3), рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу для уравнения

$$\mathcal{L}\left[y\right] = z\left(x,t\right), \ \{x,t\} \in \Pi \quad (4)$$

с условиями (2), (3). Для любых $y \in V_2^{1,0}(\Pi)$, $\eta \in W_2^{1,1}(\Pi)$, $z \in L_\infty(\Pi)$, $\xi \in [0,T]$ положим: $J[y(.), \eta(.), z(.), \xi] \equiv$

$$\equiv \int\limits_0^\xi dt \int\limits_Q \left\{ -y\eta'_t + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} y'_{x^j} \eta'_{x^i} + \sum_{j=1}^{n} b_j y'_{x^j} \eta - \eta z \right\} dx + \int\limits_Q y(x,\xi)\eta(x,\xi) dx.$$

Следуя [11, гл. 3], будем рассматривать ограниченные обобщенные решения задачи (2)-(4) класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}$. Функцию $y(.)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi_\sigma)$, $0 < \sigma \le T$, назовем решением задачи (2)-(4) на цилиндре Π_σ, отвечающим управлению $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, если она ограничена на Π_σ и для почти каждого $\xi \in [0,\sigma]$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$J[y(.), \eta(.), z(.), \xi] = 0, \quad \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi_\sigma).$$

Для любых $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ и $z \in L_\infty(\Pi)$, задача (2)-(4) имеет единственное ограниченное обобщенное класса $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ решение на цилиндре Π [11, гл. 3]. Оператор, ставящий в соответствие функции z это решение при данном $\mathbf{c}$, обозначим $A_{\mathbf{c}}$:

$$y(t,x) = A_{\mathbf{c}}[z](t,x), \quad \{x,t\} \in \Pi, \quad z \in L_\infty(\Pi).$$

Из результатов [1, гл. 2, §5], [7], [11, гл. 4] получаем следующие свойства этого оператора.

Лемма 1. *При любом* $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$ *оператор* $A_{\mathbf{c}}$ *— это линейный ограниченный оператор в* $L_\infty(\Pi)$, *имеющий интегральное представление*

$$A_{\mathbf{c}}[z](x,t)=\int_0^t d\tau\int_Q G_{\mathbf{c}}(\{x,t\},\{s,\tau\})\,z(s,\tau)\,ds,\quad \{x,t\}\in\Pi,$$

где $G_{\mathbf{c}}$ *— функция Грина задачи (2)-(4). Он является оператором типа потенциала, так как функция* $G_{\mathbf{c}}$ *представима в виде*

$$G_{\mathbf{c}}(\{x,t\},\{s,\tau\})=\Gamma_{\mathbf{c}}(\{x,t\},\{s,\tau\})\left((t-\tau)^2+|\,x-s\,|^2\right)^{-\frac{n}{2}},\{x,t\}\in\Pi,\{s,\tau\}\in\Pi,$$

где $\Gamma_{\mathbf{c}}(\{x,t\},\{s,\tau\})$ *— функция, ограниченная по модулю на* $\Pi\times\Pi$ *некоторой величиной, зависящей лишь от* d_1,d_2,d_3,α. *Для любого* $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$ *величина*

$$\mu_{\mathbf{c}}\equiv vraisup_{x\in Q,\,0\le\tau\le t\le T}\int_Q|\,G_{\mathbf{c}}(\{x,t\},\{s,\tau\})\,|\,ds$$

конечна.

Решением задачи (1)-(3) на цилиндре Π_σ, $0<\sigma\le T$, отвечающим набору $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$, назовем функцию $y(\cdot)$, являющуюся при данном $\mathbf{c}$ и $z(x,t)\equiv g(\{x,t\},y(x,t))$ ограниченным обобщенным класса $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(\Pi_\sigma)$ решением задачи (2)-(4) на этом цилиндре. На любом цилиндре Π_σ, $0<\sigma\le T$, набору $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$ не может отвечать более одного решения задачи (1)-(3). Из результатов [7] получаем для этой задачи следующую теорему существования и единственности решения.

Теорема 1. *Если набор* $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$ *и число* $\sigma\in(0,T]$ *таковы, что при некотором* $M>0$ *выполняется неравенство* $\mu_{\mathbf{c}}\sigma N(M)<M$, *то набору* $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$ *отвечает на цилиндре* Π_σ *единственное решение задачи (1)-(3).*

Пусть Ω — та часть $\mathbf{D}$, каждому элементу $\mathbf{c}$ которой отвечает единственное глобальное (то есть на цилиндре Π) решение $y_{\mathbf{c}}(\cdot)$ задачи (1)-(3). Для $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$, $\mathbf{c_0}\in\Omega$ положим $r(\mathbf{c},\mathbf{c_0})\equiv\|A_{\mathbf{c}}-A_{\mathbf{c_0}}\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}$. Сказанное выше позволяет, используя вольтеррову функционально-операторную переформулировку в смысле [1] (см. также [2, 6]) начально-краевой задачи (1)-(3), доказать следующую теорему УСГР.

Теорема 2. *Для любого* $\mathbf{c_0}\in\Omega$ *существуют числа* $\delta>0$ *и* $C>0$ *такие, что, если для некоторого* $\mathbf{c}\in\mathbf{D}$ *выполняется неравенство* $r(\mathbf{c},\mathbf{c_0})<\delta$, *то* $\mathbf{c}\in\Omega$, *при этом* $\|y_{\mathbf{c}}-y_{\mathbf{c_0}}\|_{V_2^{1,0}(\Pi)}\le Cr(\mathbf{c},\mathbf{c_0})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 112 с.

2. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145-155.

3. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1 (23). С. 198-204.

4. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 164-174.

5. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. IV // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2004. Вып. 1 (27). С. 185-193.

6. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математика. 2003. Вып. 1. С. 91-107.

7. *Сумин В.И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1587-1595.

8. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 493-495.

9. *Сумин В.И., Филюшкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начальнокраевой задачи для нелинейного управляемого параболического уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». Воронеж, 2017. С. 187-189.

10. *Сумин В.И., Филюшкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с управляемой главной частью // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-28». Воронеж, 2017. С. 158-160.

11. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Коржавина Марьяна Сергеевна, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, аспирант кафедры прикладной математики, e-mail: maryasha_f@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: v_sumin@mail.ru

Для цитирования: *Коржавина М.С., Сумин В.И.* О начально-краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 317–324. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324

ON THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH CONTROLLED PRINCIPAL PART

M. S. Korzhavina, V. I. Sumin

Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: maryasha_f@mail.ru, v_sumin@mail.ru

Abstract. The first initial-boundary value problem for a semilinear parabolic equation with controlled coefficients of the main part is considered. Sufficient stability conditions (at perturbation of the controlled coefficients) of the existence of global solutions of the initial-boundary value problem are formulated.
Keywords: semilinear parabolic equation; the first initial-boundary value problem; the controlled main part; the stability of the existence of global solutions

REFERENCES

1. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems]. Nizhny Novgorod, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod Publ., 1992, 112 p. (In Russian).

2. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. I [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. I]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 1999, no. 2 (21), pp. 145-155. (In Russian).

3. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. II [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. II]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 2001, no. 1 (23), pp. 198-204. (In Russian).

4. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. III [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. III]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 2002, no. 1 (25), pp. 164-174. (In Russian).

The work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of the project part of state task in the sphere of scientific activities in 2014-2016 (project № 1727).

5. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. IV [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. IV]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 2004, no. 1 (27), pp. 185-193. (In Russian).

6. Sumin V.I. Problema ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyaemykh kraevykh zadach i vol'terrovy funktsional'nye uravneniya [The problem of sustainability of existence global solutions of controlled boundary value problems and Volterra functional equations]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematika* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematcs], 2003, no. 1, pp. 91-107. (In Russian).

7. Sumin V.I. Ob ustoychivosti sushchestvovaniya global'nogo resheniya pervoy kraevoy zadachi dlya upravlyaemogo parabolicheskogo uravneniya [Stability of the existence of a global solution to the first boundary value problem for a controllable parabolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 9, pp. 1587-1595. (In Russian).

8. Sumin V.I. Usloviya ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyaemykh kraevykh zadach dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy [The stability conditions of existence global solutions of controlled boundary value problems for nonlinear parabolic equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 493-495. (In Russian).

9. Sumin V.I., Filyushkina M.S. Usloviya sokhraneniya global'noy razreshimosti nachal'nokraevoy zadachi dlya nelineynogo upravlyaemogo parabolicheskogo uravneniya [Conditions for preserving the global solvability of the initial-boundary value problem for a nonlinear parabolic equation]. *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii «Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola» «Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy»* [Proceedings of the International Conference "Voronezh Winter Mathematical School" "Modern Methods of Function Theory and Related Problems"]. Voronezh, 2017, pp. 187-189. (In Russian).

10. Sumin V.I., Filyushkina M.S. Usloviya sokhraneniya global'noy razreshimosti nachal'nokraevoy zadachi dlya nelineynogo parabolicheskogo uravneniya s upravlyaemoy glavnoy chast'yu [Conditions for preserving the global solvability of the initial-boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with a controlled principal part]. *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii «Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya-28» «Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy»* [Proceedings of The International Conference "Voronezh Spring Mathematical School "The Pontryagin Readings-28" "Modern Methods of Function Theory and Related Problems"]. Voronezh, 2017, pp. 158-160. (In Russian).

11. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (In Russian).

Received 20 March 2018
Reviewed 23 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Korzhavina Mar'yana Sergeevna, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Graduate student of the Applied Mathematics Department, e-mail: maryasha_f@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

For citation: Korzhavina M.S., Sumin V.I. O nachal'no-craevoi zadache dlya polulineynogo parabolichescogo uravneniya s upravlyaemoy glavnoy chast'yu [On the initial-boundary value problem for semilinear parabolic equation with controlled principal part]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 317–324. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324 (In Russian, Abstr. in Engl.).